Никитин: Вот выкладки, перечитывать вслух мне их бессмысленно... (пауза) А было бы интересно зачитывать их, как сводку Левитан. (Меняет интонацию). Сегодня мы освободили вторую строчку преобразований Фолди-Вайтхаузена! Потери среди студентов: один свихнулся, один не пришёл!

Никитин: Вы заметили, что на Физтехе, хотя там программа сложнее, студентов меньше с ума сходят?
Студенты: Потому что на Физтехе при таких же обстоятельствах студенты уже выпиливаются!

Процесс от Никитина:

Гамильтониан взаимодействия нейтрального псевдоскалярного пиона с лептонами выберем в виде:

$$\mathcal{H}^{int}(x) = -g\,\pi(x)\,\left(\bar{\ell}(x)\gamma_5\ell(x)\right)$$

Найти ширину распада $\pi^0 \to \ell^+\ell^-$. Принять, что $m_\ell \neq 0$. Пион считать точечной частицей.

Сразу вопрос читателю: какие две трудности вылезут при решении этой задачи?

Первая бросается в глаза: это распад, а не сечение! Такого у нас ещё не было. Уже делаем пометку, что ультра-формулы

$$d\sigma(s,t) = \frac{\left|M_{fi}(s,t)\right|^2}{64\pi((s-m_1^2-m_2^2)^2-m_1^2m_2^2}dt$$

$$\sigma(s) = \int\limits_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} \frac{d\sigma(s,t)}{dt}dt$$

$$t_{\text{мин}} = m_1^2+m_3^2-2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_1^2,m_2^2)+m_1^2}\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_3^2,m_4^2)+m_3^2}+\frac{1}{4s}\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}\right)$$

$$t_{\text{макс}} = m_1^2+m_3^2-2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_1^2,m_2^2)+m_1^2}\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_3^2,m_4^2)+m_3^2}-\frac{1}{4s}\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}\right)$$

$$\lambda(a,b,c) = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc$$

работать не будут. Кинематику придётся выводить с нуля!

Вторая: вершина типа $\pi^0 l^- l^+$. Правил Фейнмана для такой вершины нет. К счастью, в условии дан гамильтониан, а значит, мы благодаря ему и мы подсчитаем M-матричный элемент – как это было с КЭД1. С этого и начнём.

Нужно подсчитать

$$<\text{кон}\left|\hat{H}\right|\text{нач}> = <\text{лептон и антилептон}\left|-g\pi(\boldsymbol{x})\bar{l}(\boldsymbol{x})\gamma_5 l(\boldsymbol{x})\right|\text{один пион}>$$

Если всё аккуратно проделать, то получим

$$M_{fi} = \bar{u}(1)g\gamma^5 v(2)$$
$$M_{fi}^* = \bar{v}(2)g\gamma_5 v(1)$$

$$\left|M_{fi}^2\right| = \bar{u}(1)g\gamma^5 v(2)\bar{u}(1)g\gamma^5 v(2) = g^2(\bar{u}(1)\gamma^5 v(2)\bar{u}(1)\gamma^5 v(2))$$

А далее начинается боль, унижение и депрессуха – нам предстоит усреднение по спину.

Применяем правило:

Правило: если

$$\left|M_{fi}\right|^2 = C * \sum_{s_1,s_2} \bar{v}(N_2)\hat{A}u(N_1) * \bar{u}(N_1)\hat{B}v(N_2)$$

Где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ какие-то операторы, то в результате суммирования получим:

$$\left|M_{fi}\right|^2 = C * Sp\left(\hat{A}(\hat{k}_{N_1} + I * m_{N_1})\hat{B}(\hat{k}_{N_1} - I * m_{N_2})\right)$$

Применяем правило:

$$\left|M_{fi}\right|^2 = g^2 * Sp\left(\gamma^5(\hat{k}_1 + I * m_l)\gamma^5(\hat{k}_2 - I * m_l)\right)$$

После упрощений приходим:

$$\left|M_{fi}\right|^2 = g^2\left(m_l^2 Sp(\gamma^5\gamma^5) - Sp(\hat{k}_1\gamma^5\hat{k}_2\gamma^5)\right)$$

Первый след считается как нефиг делать:

$$Sp(\gamma^5\gamma^5) = SpI = 4$$

Для второго можно использовать свойства гамма-матриц, можно сразу применить

$$\mathrm{Sp}\left(\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}\,\hat{d}\right) = 4\Big((ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)\Big)$$

в любом случае мы получим

$$Sp(\hat{k}_1\gamma^5\hat{k}_2\gamma^5) = -4(\boldsymbol{k_1 k_2})$$

Поэтому

$$M = 4g^2\left(m_l^2 + (\boldsymbol{k_1 k_2})\right)$$

Давайте за m обозначать массу лептона, а за M массу пиона.

$$\left|M_{fi}\right|^2 = 4g^2(m^2 + (\boldsymbol{k_1 k_2}))$$

Нужно выразить $(\boldsymbol{k_1 k_2})$**.**

Вопрос на понимание: можем ли мы здесь написать

$$(\boldsymbol{k_1 k_2}) = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2}$$

Ответ: нет, переменные Мандельстама работают лишь для реакций $1 + 2 \to 3 + 4$, а здесь у нас распад $3 \to 1 + 2$, и переменные Мандельстама не определены.

Так что считаем всё по-честному:

$$M^2 = \boldsymbol{k_\pi^2} = (\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2})^2 = \boldsymbol{k_1^2} + \boldsymbol{k_2^2} + \boldsymbol{2}(\boldsymbol{k_1 k_2}) = 2(m^2 + (\boldsymbol{k_1 k_2}))$$

$$(\boldsymbol{k_1 k_2}) = \frac{M^2}{2} - m^2$$

$$\left|M_{fi}\right|^2 = 4g^2\left(m^2 + \frac{M^2}{2} - m^2\right) = 2g^2M^2$$

И вот мы подошли к кинематической трудности:

$$\text{ширина распада } \Gamma = \frac{\left|M_{fi}\right|^2 * \Phi}{2M}$$

где Ф – объём фазового пространства. Напомним, согласно Золотому правилу Ферми из квантовой теории, распад идёт по всем возможным конечным состояниям (т.е. импульсам конечных частиц), не запрещённым ЗСЭ. Потому

$$\begin{cases} \Phi = \iiint\limits_{\overrightarrow{k_1}} \iiint\limits_{\overrightarrow{k_2}} (2\pi)^4 \text{б}^4(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2}) * \frac{d^3\overrightarrow{k_1}}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\overrightarrow{k_2}}{(2\pi)^3 2E_2} \\ \text{где } E_1 = \sqrt{m_1^2 + \overrightarrow{k_1}^2} \\ \text{где } E_2 = \sqrt{m_2^2 + \overrightarrow{k_2}^2} \end{cases}$$

Напомню, что стрелочки – это 3-векторы!

Перепишем без 4-векторов:

$$\begin{cases} \Phi = \iiint\limits_{\overrightarrow{k_1}} \iiint\limits_{\overrightarrow{k_2}} (2\pi)^4 \text{б}(M - E_1 - E_2)\text{б}\left(\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_2}\right) * \frac{d^3\overrightarrow{k_1}}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\overrightarrow{k_2}}{(2\pi)^3 2E_2} \\ \text{где } E_1 = \sqrt{m_1^2 + \overrightarrow{k_1}^2} \\ \text{где } E_2 = \sqrt{m_2^2 + \overrightarrow{k_2}^2} \end{cases}$$

Избавляемся от $\overrightarrow{k_2}$:

$$\begin{cases} \Phi = \iiint\limits_{\overrightarrow{k_1}} \dfrac{1}{(2\pi)^2 4E_1E_2} \text{б}(M - E_1 - E_2) * d^3\overrightarrow{k_1} \\ \qquad\qquad \text{где } E_1 = \sqrt{m_1^2 + \overrightarrow{k_1}^2} \\ \qquad\qquad \text{где } E_2 = \sqrt{m_2^2 + \overrightarrow{k_1}^2} \end{cases}$$

А теперь подставляем энергии:

$$\Phi = \iiint\limits_{\overrightarrow{k_1}} \frac{1}{16\pi^2\sqrt{m_1^2 + \overrightarrow{k_1}^2}\sqrt{m_2^2 + \overrightarrow{k_1}^2}} \text{б}\left(M - \sqrt{m_1^2 + \overrightarrow{k_1}^2} - \sqrt{m_2^2 + \overrightarrow{k_1}^2}\right) * d^3\overrightarrow{k_1}$$

Видим, что интеграл зависит только от $\overrightarrow{k_1}^2$. Переходим в сферическую СК, обозначая $\left|\overrightarrow{k_1}\right| = k$. Интегралы по θ и φ берутся сразу, получается множитель 4π. Также возникает якобиан перехода k^2

$$\Phi = \int_0^{+\infty} k^2 \frac{4\pi}{16\pi^2\sqrt{m_1^2 + k^2}\sqrt{m_2^2 + k^2}} \text{б}\left(M - \sqrt{m_1^2 + k^2} - \sqrt{m_2^2 + k^2}\right) * dk$$

А такой одномерный интеграл с дельта-функцией равен, казалось бы

$$\Phi = \frac{k^2}{4\pi\sqrt{m_1^2 + k^2}\sqrt{m_2^2 + k^2}} \text{ в точке, где } M - \sqrt{m_1^2 + k^2} - \sqrt{m_2^2 + k^2} = 0$$

На самом деле это не так ☺ Вспомним потенциал Лиенара-Вихерта. Да-да!

Как вычислять интегралы типа $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta g(\tau)\,d\tau$?

Ответ: нужно 1) найти корни функции g(), которые мы обозначим как τ_n

2) Интеграл будет равен $\displaystyle\sum_{\text{по всем корням}} \frac{f(\tau_n)}{g'(\tau_n)}$

В данном случае корень у нас будет всего один, к счастью.

Так что ответикус (уже верный!) запишется, как

$$\frac{\dfrac{k^2}{4\pi\sqrt{m_1^2 + k^2}\sqrt{m_2^2 + k^2}}}{\dfrac{\partial}{\partial k}\left(M - \sqrt{m_1^2 + k^2} - \sqrt{m_2^2 + k^2}\right)} \text{ в той самой точке}$$

Возьмём производную as pervokur (or, may be, desyaty/odinnadcatyklassnik):

$$\frac{\dfrac{k^2}{4\pi\sqrt{m_1^2+k^2}\sqrt{m_2^2+k^2}}}{\left(\dfrac{k}{\sqrt{m_1^2+k^2}}+\dfrac{k}{\sqrt{m_2^2+k^2}}\right)}=\frac{\dfrac{k}{4\pi\sqrt{m_1^2+k^2}\sqrt{m_2^2+k^2}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{m_1^2+k^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{m_2^2+k^2}}\right)}$$

$$=\frac{k}{4\pi(\sqrt{m_1^2+k^2}+\sqrt{m_2^2+k^2})}\text{ в той самой точке}$$

А теперь ищем эту точку, решая иррациональное уравнение as vosymiklassnik

$$\sqrt{m_1^2+k^2}=M-\sqrt{m_2^2+k^2}$$

$$m_1^2+k^2=M^2+(m_2^2+k^2)-2M\sqrt{m_2^2+k^2}$$

$$2M\sqrt{m_2^2+k^2}=M^2-m_1^2+m_2^2$$

$$4M^2(m_2^2+k^2)=(M^2-m_1^2+m_2^2)^2$$

$$k^2=\frac{(M^2-m_1^2+m_2^2)^2}{4M^2}-m_2^2$$

Также верно и то, что

$$k^2=\frac{(M^2-m_2^2+m_1^2)^2}{4M^2}-m_1^2$$

И это тоже:

$$k^2=\frac{(M^2-m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2}{4M^2}$$

Зачем нам аж три формы ответа? Чтобы их подставить в разные места. Глядите:

$$\Phi=\frac{\sqrt{\dfrac{(M^2-m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2}{4M^2}}}{4\pi\left(\sqrt{m_1^2+\dfrac{(M^2-m_2^2+m_1^2)^2}{4M^2}-m_1^2}+\sqrt{m_2^2+\dfrac{(M^2-m_1^2+m_2^2)^2}{4M^2}-m_2^2}\right)}*$$

Теперь стало понятно, зачем нам потребовались все три формулы: радикалы уходят:

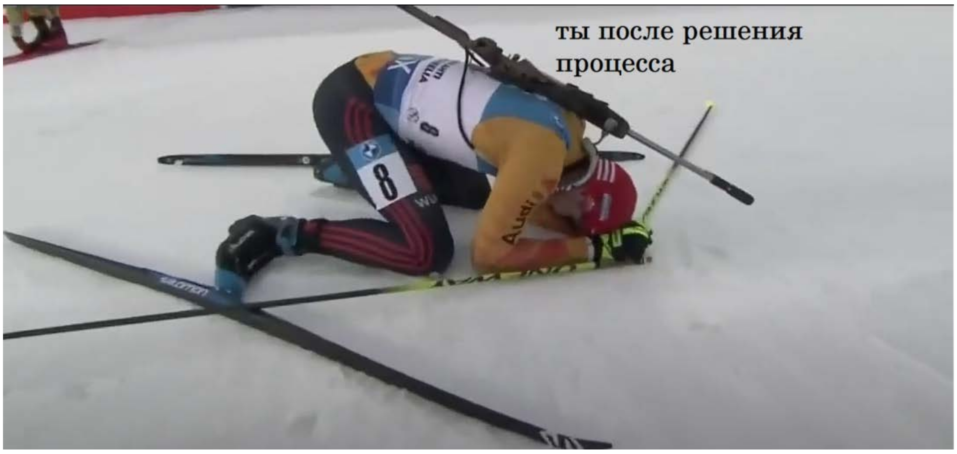
$$\Phi = \frac{\sqrt{\frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4M^2}}}{4\pi \frac{(M^2 - m_2^2 + m_1^2) + (M^2 - m_1^2 + m_2^2)}{2M}} = \frac{\sqrt{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{4\pi((M^2 - m_2^2 + m_1^2) + (M^2 - m_1^2 + m_2^2))}$$

$$= \frac{\sqrt{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{8\pi M^2}$$

Ситуация упрощается в случае $m_1 = m_2 = m$, как в нашем случае.

$$\Phi = \frac{\sqrt{(M^2 - 2m^2)^2 - 4m^4}}{8\pi M^2} = \frac{\sqrt{M^2(M^2 - 4m^2)}}{8\pi M^2} = \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{8\pi M}$$

$$\text{Ширина распала } \Gamma = \frac{|M_{fi}|^2 * \Phi}{2M} = \frac{2g^2 M^2 * \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{8\pi M}}{2M} = \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{8\pi}$$



Комментарии:

а) Проверка на размерность – ответ имеет размерность грамма, т.е. 1/сек. То, что надо для ширины распада (ведь $e^{-\Gamma t}$ – показатель экспоненты должен быт безразмерный).

б) вторая половина решения – по сути это решение задачи №72 Никитина:

Задача N72 Частица массы M распадается на две частицы массой m_1 и m_2. В системе покоя распадающейся частицы вычислить двухчастичный фазовый объем

$$d\Phi^{(2)} = (2\pi)^4\,\delta(P - p_1 - p_2)\,\frac{d\vec{p}_1}{(2\pi)^3\,2\,\varepsilon_1}\,\frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3\,2\,\varepsilon_2},$$

где P^μ – 4-импульс распадающейся частицы, $p_1^\mu = (\varepsilon_1, \vec{p}_1)$ и $p_2^\mu = (\varepsilon_2, \vec{p}_2)$ – 4-импульсы продуктов распада. Отдельно рассмотреть случай, когда $m_1 = m_2 = 0$.

Первая половина – задача 67

Задача N67 Написать правила Фейнмана для вычисления древесных диаграмм в теории с гамильтонианом взаимодействия $\mathcal{H}^{int}(x) = g\,\varphi(x)\,\left(\bar{f}(x)\gamma_5 f(x)\right)$, где $f(x)$ – поле фермионов, $\varphi(x)$ – поле псевдоскалярной частицы, g – константа связи.

А вся задача – это задача 74

Задача N74 Используя гамильтониан **Задачи N67** и полагая известной константу g, найти выражение для ширины распада $\pi^0 \to e^+e^-$.

в) Как вы видите, при решении кинематики мы испытывали математические трудности, но не физические. Я рекомендую при вычислении фазовых объёмов в более сложных случаях (например, если вы позаритесь на 73-й никитинский гроб)

Задача N73* Частица массы M распадается на три частицы одинаковой массы m. В системе покоя распадающейся частицы вычислить трехчастичный фазовый объем

$$d\Phi^{(3)} = (2\pi)^4\,\delta(P - p_1 - p_2 - p_3)\,\frac{d\vec{p}_1}{(2\pi)^3\,2\,\varepsilon_1}\,\frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3\,2\,\varepsilon_2}\,\frac{d\vec{p}_3}{(2\pi)^3\,2\,\varepsilon_3},$$

где P^μ – 4-импульс распадающейся частицы, $p_1^\mu = (\varepsilon_1, \vec{p}_1)$, $p_2^\mu = (\varepsilon_2, \vec{p}_2)$ и $p_3^\mu = (\varepsilon_3, \vec{p}_3)$ – 4-импульсы продуктов распада. Отдельно рассмотреть случай, когда $m = 0$.

действовать так же – получить математическую постановку задачи в виде вычисления охренненого интеграла в системе, а затем уже её упрощать.

Показываю, как НЕ надо делать:

$$d^6\Phi = (2\pi)^4 б(M - E_1 - E_2) б(\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_2}) * \frac{d^3\overrightarrow{k_1}}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{d^3\overrightarrow{k_2}}{(2\pi)^3 2E_2}$$

Избавляемся от $\overrightarrow{k_2}$:

$$d^3\Phi = \frac{1}{(2\pi)^2 4E_1E_2} б(M - E_1 - E_2) * d^3\overrightarrow{k_1}$$

И здесь есть естественный риск избавиться от дельта-функции совсем:

$$d^3\Phi = \frac{1}{(2\pi)^2 4E_1(M - E_1)} * d^3\overrightarrow{k_1}$$

Естественно, это не верно – мы не учли, что E_2 у нас не произвольное, а $\sqrt{m_2^2 + \overrightarrow{k_2}^2}$. Всё, правильного ответа мы уже не получим.

Чтобы так не косячить, сразу напишите в систему всё уравнения. А далее на компьютере copy-paste с дальнейшим упрощением. Так вы ничего не потеряете. Да, громоздко, но зато вам не надо ничего держать в памяти, кроме как текущей системы.